



“十四五”职业教育国家规划教材
(中等职业学校公共基础课程教材)

新兴

基础模块

上册

张景斌 主编

111111 语文出版社

第五单元

三角函数

回顾与思考

在现实世界中许多周期运动与周期现象，它们的运动和变化周而复始。例如，骑车上学时车轮上某一定点绕车轮轴的运动，每天 24 小时的昼夜变化，大海中的潮起潮落等，这些周期运动与周期现象都可以用三角函数来刻画。

三角函数既是进一步学习数学的基础，又是解决生产实际和科学技术中某些问题的工具。

本单元，我们在初中学习的锐角三角函数的基础上，对角的概念进行扩展，继续讨论任意角的三角函数，学习一些三角关系式，研究三角函数的图像和性质。这些知识将为同学们今后学习专业知识，掌握职业技能打下基础。

5.1 角的概念的推广

引例

生活中的很多物体都给我们以角的印象，如钟表上的时针与分针所成的角等。但是，我们注意到，钟表的时针与分针一直在不停地转动着，它们所转过的角已远远超过 360° ，那么这样的角该怎么描述呢？



我们知道，在平面内，角可以看作是一条射线绕着它的端点旋转而成的图形。旋转起始时的射线叫做角的始边，终止时的射线叫做角的终边，射线的端点叫做角的顶点。

图 5-1 (1) 中， OA 是角 α 的始边， OB 是角 α 的终边， O 是角 α 的顶点。

图 5-1 (2) 中， $O'A'$ 是角 β 的始边， $O'B'$ 是角 β 的终边， O' 是角 β 的顶点。

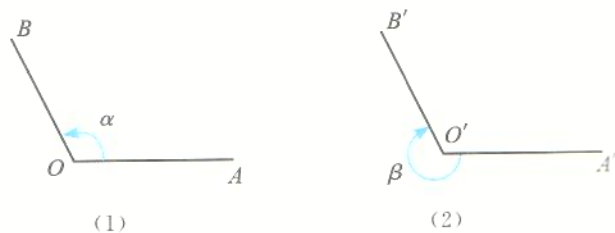


图 5-1

角除了用字母 A, B, C 等表示外，还可以用字母 α, β, γ 等表示。特别是当角作为变量时，常用字母 x 表示。

在初中，我们学习过 0° 到 360° 的角。如果 $\alpha=90^\circ$ ，那么 α 叫做直角；如果 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，那么 α 叫做锐角；如果 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ，那么 α 叫做钝角；如果 $\alpha=180^\circ$ ，那么 α 叫做平角；如果 $\alpha=360^\circ$ ，那么 α 叫做周角。



直线上的一点和它一旁的部分所组成的图形称为射线或半直线，如射线 OA 。



在实际问题中，我们经常会遇到大于 360° 的角和按不同方向旋转的角。例如，拧紧螺帽时，螺帽绕螺帽轴按顺时针方向旋转，可能需要 1 周，2 周，……，这样转过的角往往超过 360° 。而当放松螺帽时，又要按与拧紧时相反的方向旋转，可能需要 1 周，2 周，……，因此，角的范围不只限于 0° 到 360° 。

既然角是由一条射线绕着它的端点旋转而成，旋转时就有两个相反的方向，即逆时针方向和顺时针方向。为了区别因旋转方向不同而形成的角，我们规定：按逆时针方向旋转所得到的角为**正角**，如图 5-1 (1) 中， α 为正角；而按顺时针方向旋转所得到的角为**负角**，如图 5-1 (2) 中， β 为负角。我们还规定：当一条射线没有做任何旋转时，也把它看成一个角，叫做**零角**。这样，零角的始边和终边重合。如果角 α 是零角，那么

在图 5-2 中，射线 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转到 OB 所成的角记作 α ，按顺时针方向旋转到 OC 所成的角记作 β 。

如图 5-3 所示，射线 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转到 OB 所成的角记作 α ，按顺时针方向旋转到 OC 所成的角记作 β 。

$$\alpha = 45^\circ, \beta = -330^\circ.$$

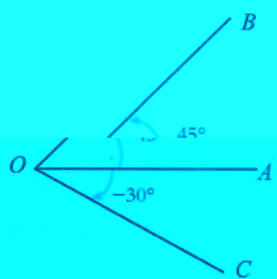


图 5-2

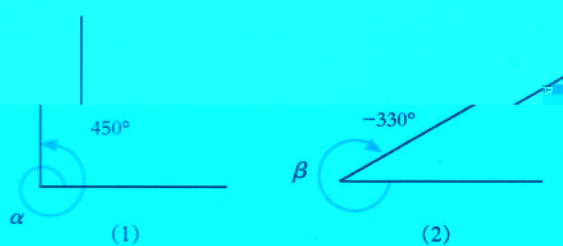


图 5-3

至此，我们就把角的概念推广到任意大小的正角、负角和零角的范围。为了便于讨论问题，我们总是把任意大小的角放到平面直角坐标系内

试一试

将图 5-3 中的角 α 按上述方法放到直角坐标系中，如图 5-4 所示，那么 α 是第一象限的角。

如果把 $\alpha=30^\circ$ 按上述方法放到直角坐标系中（图 5-4）， α 的始边为 Ox ，终边为 OP ，那么 α 是第一象限的角。

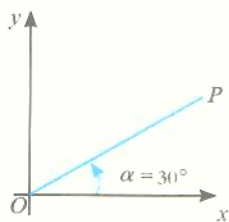


图 5-4



议一议

以 Ox 为始边，把 30° 角的终边分别按照逆时针方向和顺时针方向旋转 2 周后，所得角的大小分别是多少度？与 $\alpha=30^\circ$ 有相同的始边和终边的角可以怎样表示呢？

这些角可以分别表示为

$$\begin{aligned} &30^\circ+360^\circ, & 30^\circ-360^\circ, \\ &30^\circ+2\times 360^\circ, & 30^\circ-2\times 360^\circ, \\ &30^\circ+3\times 360^\circ, & 30^\circ-3\times 360^\circ, \\ &\dots \end{aligned}$$

所有这些角可以表示为 $30^\circ+k\cdot 360^\circ$ ($k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0$)。如果把 α 本身也算在内，那么这些角可以表示为 $30^\circ+k\cdot 360^\circ$ ($k\in\mathbf{Z}$)。

这些顶点为坐标原点，始边为 x 轴正半轴，且有相同终边的角，叫做**终边相同的角**。由上述问题的讨论可以知道，与角 α 终边相同的角有无数多个。

一般地，所有和角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可以表示成

$$\alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

结合集合的知识, 对于每一个任意大小的角 α , 就确定了一个与 α 终边相同的角的集合, 这个集合可以表示为

$$S = \{x \mid x = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

反之, 如果 $x = \alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbf{Z})$, 那么 x 与角 α 就是终边相同的角, 因此, 它们或同属于某一个象限, 或终边同在某一条坐标轴的半轴上.

例如, $750^\circ = 30^\circ + 2 \times 360^\circ$, 则 750° 角与 30° 角同属于第一象限;

$-450^\circ = 270^\circ - 2 \times 360^\circ$, 则 -450° 角与 270° 角同在 y 轴的负半轴上.

例1 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内*, 找出与下列各角终边相同的角, 并判定各角所在的象限:

(1) $1\ 000^\circ$; (2) -120° ; (3) $410^\circ 30'$.

解 (1) $\because 1\ 000^\circ = 280^\circ + 2 \times 360^\circ$,

$\therefore 1\ 000^\circ$ 角和 280° 角的终边相同.

又 280° 角属于第四象限,

$\therefore 1\ 000^\circ$ 角也是第四象限角.

(2) $\because -120^\circ = 240^\circ - 360^\circ$,

$\therefore -120^\circ$ 角和 240° 角的终边相同.

又 240° 角属于第三象限,

$\therefore -120^\circ$ 角也是第三象限角.

(3) $\because 410^\circ 30' = 50^\circ 30' + 360^\circ$,

$\therefore 410^\circ 30'$ 角和 $50^\circ 30'$ 角的终边相同.

又 $50^\circ 30'$ 角属于第一象限,

$\therefore 410^\circ 30'$ 角也是第一象限角.



想一想

锐角是第几象限角? 第一象限的角都是锐角吗?

* 本书中, 角 α 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 是指 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

因此, 终边在 y 轴上的所有的角是 $90^\circ + k \cdot 360^\circ$ 和 $270^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbf{Z}$). 注意到

$$90^\circ + k \cdot 360^\circ = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} 270^\circ + k \cdot 360^\circ &= 90^\circ + 180^\circ + 2k \cdot 180^\circ \\ &= 90^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ. \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

①式的右边是 180° 的偶数倍加 90° , ②式的右边是 180° 的奇数倍加 90° , 两式合并起来就是 180° 的任意整数倍加 90° , 即 $90^\circ + n \cdot 180^\circ$ ($n \in \mathbf{Z}$), 所以, 终边在 y 轴上的角的集合可以写成

$$S = \{\beta \mid \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}.$$



想一想

终边在 x 轴上的角的集合怎样表示?



图 5-5

练习

- 在直角坐标系中, 以原点为顶点, x 轴的正半轴为始边, 画出下列各角, 并分别指出它们是第几象限角:
 - 390° ;
 - -60° ;
 - -585° .
- 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并分别指出它们是第几象限角:
 - 480° ;
 - -760° ;
 - $932^\circ 30'$.
- 写出与下列各角终边相同的角的集合:
 - 72° ;
 - -40° ;
 - $202^\circ 39'$.